Eléments de mathématiques

I. Les objets

1°) Ensembles et éléments

Déf : On appelle ensemble toute collection d'objets appelés éléments de cet ensemble. Pour signifier qu'un élément x appartient à un ensemble E, on écrit $x \in E$. Sinon, on écrit $x \notin E$.

Déf : Deux ensembles E et F sont dits égaux ssi ils sont constitués des mêmes éléments. On note alors $E = F$.

Déf : On appelle ensemble vide, noté $\varnothing$, l'ensemble constitué d'aucun élément.

Déf : Etant donnés deux ensembles E et F, on appelle intersection de E et F l'ensemble $E \cap F$ formés des éléments communs à E et F.

Déf : Etant donnés deux ensembles E et F, on appelle union de E et F l'ensemble $E \cup F$ formés des éléments de l'un et l'autre ensemble.

2°) Inclusion

E désigne un ensemble.

Déf : Un ensemble F est dit inclus dans E ssi tout les éléments de F sont aussi éléments de E. On note alors $F \subset E$.

Déf : On appelle partie (ou sous-ensemble) de E, tout ensemble F dont les éléments sont tous éléments de E.

Déf : On appelle ensemble des parties de E l'ensemble noté $\mathcal{P}(E)$ formé des sous-ensembles de E.

3°) Produit cartésien

a) couple

Déf : A partir de deux éléments a et b, on forme le couple (a,b) défini de sorte que : $(a,b) = (a',b')$ ssi $a = a'$ et $b = b'$.

Déf : On appelle produit cartésien de E par F l'ensemble formé des couples (a,b) avec a dans E et b dans F. On le note $E \times F$.

b) multiplet

Déf : A partir d'éléments $a_1,...,a_n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), on forme le n uplet $(a_1,...,a_n)$ défini de sorte que : $(a_1,\ldots,a_n) = (a_1',\ldots,a_n')$ ssi pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $a_i = a_i'$.

Déf : On appelle produit cartésien des ensembles $E_1,...,E_n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) l'ensemble formé des n uplets $(a_1,...,a_n)$ avec pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $a_i \in E_i$.

On le note $E_1 \times \cdots \times E_n$ ou encore $\prod_{i=1}^{n} E_i$.

4°) Fonctions et applications

E et F désignent des ensembles

Déf : Une application (ou fonction) f de E vers F est une « manipulation » qui à chaque élément x de E associe un et un seul élément y de F.
L'élément y est alors noté $f(x)$ et est appelé image de x par f.
On note $f : E \to F$ pour signifier que f est une application de E vers F.
On note $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E vers F.

II. Notions de logique

1°) Assertion

Déf : On appelle assertion toute phrase mathématique significative susceptible d'être vraie (V) ou fausse (F).

Déf : Deux assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ayant mêmes valeurs de vérité sont dites équivalentes et on note $\mathcal{P} \sim \mathcal{Q}$.

Déf : Soit $\mathcal{P}(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre x élément de E.
On note $\{x \in E \text{ tel que } \mathcal{P}(x)\}$ ou $\{x \in E / \mathcal{P}(x)\}$ le sous ensemble de E formé des éléments x qui rendent l'assertion $\mathcal{P}(x)$ vraie.

2°) Négation

Soit $\mathcal{P}$ une assertion.

Déf : On appelle négation de $\mathcal{P}$, l'assertion notée non($\mathcal{P}$) définie comme étant vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et inversement.
On peut aussi dire que l'assertion non($\mathcal{P}$) est définie par la table de vérité :

$\mathcal{P}$	non($\mathcal{P}$)
V	F
F	V

Prop : non(non($\mathcal{P}$)) $\sim \mathcal{P}$ (le signe $\sim$ signifie : ont même valeur de vérité).

3°) Conjonction et disjonction

Soit $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des assertions.

Déf : On appelle conjonction (resp. disjonction) de ces deux assertions, l'assertion notée $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ (resp. $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) définie comme étant vraie si et seulement si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ le sont toutes les deux (resp. lorsqu'au moins l'une des deux l'est).

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Prop : non($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) $\sim$ non($\mathcal{P}$) ou non($\mathcal{Q}$).
non($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) $\sim$ non($\mathcal{P}$) et non($\mathcal{Q}$).

Prop : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \sim \mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{P} \sim \mathcal{P}$.
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q} \sim \mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q} \sim \mathcal{Q}$ ou $\mathcal{P}$,
($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) et $\mathcal{R} \sim \mathcal{P}$ et ($\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$) (que l'on note alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$),
($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) ou $\mathcal{R} \sim \mathcal{P}$ ou ($\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{R}$) (que l'on note alors $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{R}$),
$\mathcal{P}$ et ($\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{R}$) $\sim$ ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) ou ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$),
$\mathcal{P}$ ou ($\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$) $\sim$ ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) et ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{R}$).

4°) Implications

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions.

Déf : On définit l'assertion $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ comme étant vraie ssi $\mathcal{Q}$ ne peut pas être fausse quand $\mathcal{P}$ est vraie.
En français l'implication est traduite pas les expressions : « si... alors », « donc », « par suite » etc.
Plus précisément, la valeur de vérité de l'assertion $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est donnée par :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Déf : Lorsque $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie on dit que :
+ $\mathcal{P}$ est une condition suffisante (CS) pour $\mathcal{Q}$,
+ $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire (CN) pour $\mathcal{P}$.

Déf : $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée implication réciproque de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Prop : ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$) = non($\mathcal{P}$) ou $\mathcal{Q}$.

Prop : $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ = non($\mathcal{Q}$) $\Rightarrow$ non($\mathcal{P}$).

Déf : non($\mathcal{Q}$) $\Rightarrow$ non($\mathcal{P}$) est appelée contraposée de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Prop : non($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$) $\sim \mathcal{P}$ et non($\mathcal{Q}$).

5°) Equivalence

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux assertions.

Déf : On note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ l'assertion $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.
En français l'équivalence se traduit par les expressions : « si et seulement si » (ssi), « il faut et il suffit »,...
La table de vérité de $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ est donnée par :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Déf : Lorsque $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ est vraie, on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes et que $\mathcal{P}$ est un condition nécessaire et suffisante (CNS) pour $\mathcal{Q}$.

Prop : $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q} \sim \text{non}(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \text{non}(\mathcal{Q})$.

6°) Quantificateurs

Soit $\mathcal{P}(x)$ une assertion dépendant d'un élément $x \in E$.

Déf : On définit l'assertion $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ comme étant vraie lorsque $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout x dans E.
Cette assertion se lit : « Quel que soit x dans E on a $\mathcal{P}(x)$ »

Déf : On définit l'assertion $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ comme étant vraie lorsque $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour au moins un x dans E.
Cette assertion se lit : « Il existe x dans E tel que $\mathcal{P}(x)$ ».

Déf : On définit l'assertion $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$ comme étant vraie lorsque $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour un et un seul élément x dans E.
Cette assertion se lit : « Il existe un unique x dans E tel que $\mathcal{P}(x)$ ».

Prop : $\text{non}(\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \sim \exists x \in E, \text{non}(\mathcal{P}(x))$,
$\text{non}(\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) = \forall x \in E, \text{non}(\mathcal{P}(x))$.

Convention :
Toute assertion commençant par : $\exists x \in \varnothing$ est fausse.
Par négation : toute assertion commençant $\forall x \in \varnothing$ est vraie.

III. Raisonnements

Une assertion vraie est appelée énoncé, proposition ou théorème.
La véracité d'une assertion se justifie par une démonstration.
Certaines assertions sont postulées vraies sans démonstration, ce sont les axiomes.

1°) Démonstration d'une assertion

Pour démontrer la véracité d'une assertion $\mathcal{P}$ on peut procéder de trois manières :
(1) Montrer que $\mathcal{P}$ découle de résultats antérieurs i.e. déterminer un énoncé $\mathcal{Q}$ tel que $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ soit vraie.

(2) Opérer par disjonction de cas i.e. déterminer un énoncé $\mathcal{Q}$ tel que $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ et $\text{non}(\mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{P}$ soient vraies.

(3) Raisonner par l'absurde i.e. montrer que $\text{non}(\mathcal{P})$ implique un résultat faux.

2°) Démonstration d'une implication

Pour démontrer la véracité d'une implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ on peut procéder de deux manières :
(1) Par déduction : on détermine une assertion $\mathcal{R}$ telle que : $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{Q}$.
(avec possibilité d'enchaîner plusieurs assertions intermédiaires)

(2) Par contraposée : on établit $\text{non}(\mathcal{Q}) \Rightarrow \text{non}(\mathcal{P})$.

3°) Démonstration par récurrence

Théorème de récurrence simple :
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \geq n_0$.
Si 1) $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et
2) $\forall n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
alors $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ est vraie.